INVERSA UNEI MATRICE

Definitia 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Spunem ca matricea A este *inversabila* daca exista o matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea ca $AA' = A'A = I_n$. In acest caz matricea A' se numeste *inversa matricei* A si se face notatia $A' = A^{-1}$.

Observatie. Daca matricea A este *inversabila*, atunci si inversa ei A^{-1} este inversabila si inversa ei este chiar matricea A, adica $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exemple.

1) Deoarece $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rezulta imediat ca matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *si* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(Z)$ sunt una inversa celeleilalte.

2) Deoarece $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$ rezulta imediat ca matricile $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *si* $B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ sunt una inversa celeilalte.

Teorema 1. Inversa unei matrice, daca exista, este unica.

Demonstratie.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $A', A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel incat $AA' = A'A = I_n$ si $AA'' = A''A = I_n$. Avem $A'' = A''I_n = A''\left(AA'\right) = \left(A''A\right)A' = I_nA' = A'$, deci inversa matricii A este unica.

Este fireasca intrebarea in ce conditii o matrice este inversabila si raspunsul va fi dat de de partea teoretica care urmeaza.

INVERSA UNEI MATRICE

Definitia 2. Daca $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n-1} & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-11} & a_{n-12} & . & . & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,matricea

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & A_{n-11} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & A_{n-12} & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n-1} & A_{2n-1} & . & . & A_{n-1n-1} & A_{nn-1} \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & A_{n-1n} & A_{nn} \end{pmatrix}$, unde $A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ este

complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea A, $i, j=\overline{1,n}$, se numeste matricea *adjuncta* sau *reciproca* a matricei A .

Exemple.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}3 & (-1)^{2+1}4 \\ (-1)^{1+2}2 & (-1)^{2+2}1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (1).

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -19 & -2 \\ 6 & -7 & -5 \\ 6 & 11 & 4 \end{pmatrix} \quad (2).$$

INVERSA UNEI MATRICE

Definitia 3. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeste *nesingulara* daca $\det(A) \neq 0$ si *singulara* in caz contrar.

Lema. Daca $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ este complementul algebric al elementului $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, atunci $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det(A), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ si $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} \det(A), i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Demonstratie.

Daca $i = j$ suma $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$ reprezinta chiar dezvoltarea determinantului matricei A dupa linia j, deci este egala cu $\det(A)$. Daca $i \neq j$ suma $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$ reprezinta dezvoltarea determinantului matricei B, obtinuta din matricea A prin inlocuirea liniei j cu linia i, deci este egala cu zero (matricea B are liniile i *si* j egale).

Pentru a doua egalitate se reface acest rationament pentru coloanele i *si* j.

Teorema 2. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabila daca si numai este *nesingulara*.

Demonstratie.

"$\Rightarrow$": Din A inversabila rezulta $AA^{-1} = I_n$, de unde obtinem egalitatea $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$, deci $\det(A) \neq 0$.

"$\Leftarrow$": Aratam ca matricea $A' = \frac{1}{\det(A)} A^*$ este inversa matricei A. Intr-adevar fie $B = (b_{ij})_{1 \le i, j \le n} = AA'$ *si* $C = (c_{ij})_{1 \le i, j \le n} = A'A$.

Avem $b_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \overset{lema}{=} \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, de unde rezulta $AA' = I_n$ si apoi $c_{ji} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} A_{kj} a_{ki} \overset{lema}{=} \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}$, deci $A'A = I_n$.

INVERSA UNEI MATRICE

Aplicatie.

Sa se dermine daca matricile $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ si $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\\ 4 & -3 & 5\end{pmatrix}$ sunt inversabile si in caz afirmativ sa se determine inversele lor.

Solutie.

Avem $\det(A)=-5\neq 0 \; si \; \det(B)=27\neq 0$, deci matricile $A \; si \; B$ fiind nesingulare sunt inversabile. Apoi tinand cont de relatiile $(1) \; si \; (2)$ obtinem:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^{*}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix} \; si \; B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}B^{*}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-3 & -19 & -2\\ 6 & -7 & -5\\ 6 & 11 & 4\end{pmatrix}.$$