Probleme propuse * Setul 7

61. (determinanţi) Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu elementele $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1}, & 1 \le j \le i \le 3 \\ 0, & 1 \le i < j \le 3. \end{cases}$
Determinantul lui A are valoarea
a) $\frac{1}{24}$; b) 1; c) 2; d) $\frac{1}{12}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{1}{3}$.

62. (sisteme liniare) Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = BAB^{-1}$.
Să se determine matricea C^{20}.
a) $\begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20} - 3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 3^{20} - 2^{20} & 3^{20} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 2^{20} \\ 3^{20} & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

63. (sisteme liniare) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = c \\ ax + by + (a+b)z = 0 \\ a^2x + b^2y + (a+b)^2z = 0. \end{cases}$
Care afirmaţie este adevărată ?
a) Dacă $a = b$, atunci sistemul este compatibil pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
b) Dacă $a = 0$ şi $b \neq 0$, atunci sistemul este compatibil pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
c) Dacă $a \neq b$, atunci sistemul este compatibil determinat, pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
d) Dacă $c \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
e) Dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, atunci sistemul este incompatibil pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
f) Dacă $a + b \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat $\forall c \in \mathbb{R}$.

64. (şiruri) Fie $x_n = (\sqrt{2} + 1)^n$. Pentru orice $n \ge 1$ există numere naturale a_n, b_n astfel încât $x_n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
a) $\ell = 0$; b) nu există; c) $\ell = \sqrt{2}$; d) $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\ell = \infty$; f) $\ell = -\sqrt{2}$.

65. (limite) Fie $\ell = \lim\limits_{x \nearrow 1} (1-x)^2 f(x) - \lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$, unde $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, iar $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f_n(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}, & x \le 1 \\ e^{n(1-x)}, & x > 1 \end{cases}$. Atunci ℓ este
a) 0; b) -1; c) 1; d) ∞; e) nu există; f) $-\infty$.

66. (derivabilitate) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$
este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru $n \ge 1$.
a) 1; b) 0; c) e^{-1}; d)-1; e) $\ln 2$; f) $e + e^{-1}$.

67. (primitive) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi F o primitivă a sa. Dacă $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, şi $F(0) = 1$, atunci $f(x)$ are expresia
a) $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$; c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$;
d) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$; e) $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

68. (funcţii trigonometrice) Perioada principală T a funcţiei $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ este
a) $T = 2\pi$; b) $T = \pi$; c) $T = \frac{\pi}{2}$; d) $T = \frac{\pi}{3}$; e) $T = \frac{\pi}{4}$; f) $T = \frac{\pi}{6}$.

69. (aplicţiile trigonometriei în algebră) Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, să se determine pentru câte valori $n \in \mathbb{N}, n \le 10$, avem egalitatea $(x_1 + 1)^n + (x_2 + 1)^n = -1$.
a) 0; b) 2; c) 4; d) 10; e) 8; f) nu există astfel de valori.

70. **(poliedre - volume)** Un trunchi de piramidă regulată are bazele pătrate de laturi a şi b ($a > b$), iar înălţimea este h. Calculaţi înălţimea piramidei din care s-a format acest trunchi de piramidă.

a) $\dfrac{ah}{a-b}$; b) $\dfrac{b}{a}h$; c) $\dfrac{a}{b}h$; d) $\dfrac{ah}{a+b}$; e) $\dfrac{bh}{a+b}$; f) $\dfrac{bh}{a-b}$.