

Probleme propuse * Setul 5

41. (determinanți) Fie ecuația $x^3 + px + q = 0$, având soluțiile x_1, x_2, x_3 și determinantul

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Atunci valoarea lui Δ^2 este

a) $p^3 + q^3$; b) 0; c) $-p^2 + 2q^3$; d) $4p^3 + 27q^2$; e) $27q^2$; f) $-4p^3 - 27q^2$.

42. (structuri algebrice) Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Se consideră $x * y = x^{\ln y}$, $x, y \in G$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată ?

a) legea $*$ nu este asociativă; b) legea $*$ este asociativă dar nu este comutativă; c) G nu este parte stabilă în raport cu legea $*$; d) $(G, *)$ este grup abelian; e) legea $*$ nu admite element neutru; f) există un singur element simetrizabil.

43. (polinoame) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{Z}_3$ polinomul $\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$?

a) $a = \hat{1}$; b) $a = \hat{2}$; c) $a = \hat{0}$; d) $a \neq \hat{1}$; e) $a \neq \hat{2}$; f) $a \neq \hat{0}$.

44. (șiruri) Fie $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nx]}{n}$, $x \in (0, 1)$, unde $[nx]$ este partea întreagă a lui nx . Atunci

a) $\ell = 0$; b) $\ell = x$; c) $\ell = 1 - x$; d) $\ell = 1$; e) $\ell = \frac{x}{2}$; f) $\ell = x^2$.

45. (continuitate) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci

a) f este continuă; b) $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța întâi; c) f nu are proprietatea lui Darboux; d) f are proprietatea lui Darboux; e) f este discontinuă într-un număr infinit de puncte; f) toate afirmațiile precedente sunt false.

46. (derivabilitate) Găsiți toate funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a) e^x ; b) ax ; c) $\ln x$; d) $ax + b$; e) $\sin x$; f) $\cos x$.

47. (derivabilitate) Se consideră o funcție continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și o funcție derivabilă $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x'(t) = f(x(t)) - 1$, $\forall t \in [0, \infty)$ și $\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ există și este finită, iar $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$. Să se calculeze $f(\ell)$.

a) 1; b) 0; c) -1; d) ∞ ; e) e; f) 2.

48. (funcții trigonometrice) Fie $E = \sin \left(\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{15}{17} \right)$. Atunci

a) $E = \frac{34}{35}$; b) $E = \frac{84}{85}$; c) $E = \frac{83}{85}$; d) $E = \frac{13}{85}$; e) $E = \frac{27}{85}$; f) $E = \frac{36}{85}$.

49. (funcții trigonometrice) Fie $E = \frac{\cos a + \cos b}{2} - \cos \frac{a+b}{2}$. Atunci, pentru orice $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$, avem

a) $E \geq 0$; b) $E > 0$; c) $E \leq 0$; d) $E < 0$; e) $E = 0$; f) $E \in [0, 1]$.

50. (ecuații trigonometrice) Să se determine x dacă $\sin \left(\frac{\arccos x}{3} \right) = 1$.

a) ecuația nu are soluție; b) -1; c) 0; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\cos 3$.