Probleme propuse * Setul 3

21. (structuri algebrice) Mulţimea matricelor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, formează relativ la înmulţirea matricelor un grup izomorf cu grupul multiplicativ $\mathbb{R}^*$. Atunci
a) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{pmatrix}$; c) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$;
d) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}$; e) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $(M(2))^5 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. (structuri algebrice) Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziţie $x \oplus y = mx + ny - 1$, $x \odot y = 2xy - 2x - 2y + p$. Să se determine m, n şi p astfel încât $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ să fie corp.
a) $1,2,3$; b) $1,1,3$; c) $m = n = 1$, $p \in \mathbb{R}$, d) $1,1,1+i$; e) problema nu are soluţie; f) $1,1,0$.

23. (funcţia de gradul doi) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $2x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3 = 0$, unde m este un parametru real. Care este mulţimea valorilor parametrului m pentru care $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| < 1$?
a) $m \in (-3, -\frac{1}{3})$; b) $m \in (\frac{-5-\sqrt{10}}{3}, -\frac{7}{3})$; c) $m \in (-3, -\frac{7}{3}) \cup (-1, -\frac{1}{3})$;
d) $m \in (-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (-1, +\infty)$; e) $m \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$; f) $m \in \emptyset$.

24. (şiruri) Fie $a, r, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ fixate şi fie şirurile $x_n = (a + (n-1)r)q^{n-1}$ şi $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Care afirmaţie este adevărată ?
a) x_n este o progresie geometrică; b) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$;
c) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq(q^n - 1)\frac{nq-1}{(1-q)^2}$; d) x_n este şir nemărginit $\forall a, r, q \in \mathbb{R}$;
e) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + rq(q^{n-1} - 1)\frac{nq^2-(n-1)q+1}{(1-q)^2}$; f) $y_n = a\frac{1-q^n}{1-q} + nr\frac{(n-1)q^{n+1} - nq^n + 2}{(1-q)^2}$.

25. (şiruri) Se consideră şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{\sin n!}{1+4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci
a) (x_n) este monoton şi mărginit; b) (x_n) este monoton; c) $\sup x_n = 0$;
d) (x_n) este convergent; e) $\inf x_n = 0$; f) $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

26. (derivabilitate) Fie $f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + \sqrt{x^2-1})^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. Pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, valoarea expresiei $E(x) = (x^2-1)f''(x) + xf'(x)$ este
a) $\alpha^2 f(x)$; b) $f(x)$; c) 0; d) $f'(x)$; e) $\alpha f'(x)$; f) $\alpha^2 f'(x)$.

27. (integrale definite) Să se calculeze $I = \lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{1+|x-a|}$.
a) $I = \ln 3$; b) $I = 1$; c) $I = e$; d) $I = e^{-1}$; e) $I = \ln 2$; f) $I = 0$.

28. (geometrie analitică) Fie ecuaţiile $6\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2$ şi $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$. Câte soluţii comune au aceste ecuaţii ?
a) nici una; b) o infinitate; c) două; d) toate; e) trei; f) patru.

29. (funcţii trigonometrice) Fie $E = \sin\left(\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{15}{17}\right)$. Atunci
a) $E = \frac{34}{35}$; b) $E = \frac{84}{85}$; c) $E = \frac{83}{85}$; d) $E = \frac{13}{85}$; e) $E = \frac{27}{85}$; f) $E = \frac{36}{85}$.

30. (ecuaţii trigonometrice) Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(3\arccos x) = \cos(2\arccos x) + 1\}$. Atunci
a) $A = \{0, 1, -1\}$; b) $A = \left\{0, \frac{1-\sqrt{13}}{4}; \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$; c) $A = \left\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$;
d) $A = \left\{0, \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right\}$; e) $A = [-1, 1]$; f) $A = \mathbb{R}$.