Probleme propuse * Setul 2

11. (sisteme) Aflaţi parametrul $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{xy}{x+y} < 0$, unde (x,y) este o soluţie oarecare a sistemului
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x+y) = 25a \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$
a) $a < 0$; b) $a > 0$; c) $a \in (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$; d) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{7}}{5}, \infty)$;
e) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (1, \infty)$; f) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$.

12. (mulţimi) Fie $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ şi $\alpha = \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$. Atunci
a) $\alpha \notin A$; b) $\alpha \in A$; c) $\alpha^2 = 1$; d) $\alpha^3 = 1$; e) $\alpha < 0$; f) $\alpha > 1$.

13. (mulţimi) Numerele $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au proprietatea că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 x_2 = \alpha$ şi $|x_1 - x_2| = \beta$. Atunci
a) $\alpha \geq \beta$; b) $4\alpha - \beta^2 \leq 0$; c) $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$; d) $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$; e) $\beta^2 \geq \alpha$; f) $\alpha = \beta$.

14. (şiruri) Să se determine $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n(n^{1/n} - 1)}{\ln n}$.
a) 1; b) e; c) 1/e; d) e − 1; e) 2; f) 1/2.

15. (derivabilitate) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
Punctele de derivabilitate ale lui f sunt
a) 0; b) $\mathbb{R}$; c) nu există; d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2}{\pi}\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

16. (derivabilitate) Fie $f : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ o funcţie derivabilă, inversabilă, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, şi $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ inversa sa. Atunci $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx + \int_\alpha^\beta g(y) dy$ are valoarea
a) $b\beta + a\alpha$; b) $b\beta - a\alpha$; c) $a\beta + b\alpha$; d) $a\beta - b\alpha$; e) $ab + \alpha\beta$; f) $ab - \alpha\beta$.

17. (primitive) Să se determine $F'(x)$ dacă $F(x) = \displaystyle\int_c^{b(x)} f(t)\, dt$ unde
$b : [\alpha, \beta] \to [c, d]$ derivabilă pe (α, β) şi $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[c, d]$.
a) $F'(x) = f(b(x))$; b) $F'(x) = f'(b(x)) - f(c)$; c) $F'(x) = f'(b(x))$;
d) $F'(x) = f(b(x))b'(x)$; e) $F'(x) = f(b(x))b'(x) - f(c)$; f) $F'(x) = f'(b(x))b'(x)$.

18. (ecuaţii trigonometrice) Fie ecuaţiile $6\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2$ şi $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$. Câte soluţii comune au aceste ecuaţii ?
a) nici una; b) o infinitate; c) două; d) toate; e) trei; f) patru.

19. (aplicaţii ale trigonometriei) În ce triunghi are loc relaţia $\dfrac{a+c}{b} = \operatorname{ctg} \dfrac{B}{2}$?
a) echilateral; b) dreptunghic; c) oarecare; d) în nici un triunghi; e) isoscel;
f) obtuzunghic.

20. (geometrie în spaţiu) Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Să se calculeze unghiul dintre dreptele AC şi AB'.
a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{7\pi}{12}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{5}$; f) $\frac{3\pi}{8}$.

Academia de matematica