

## Probleme propuse \* Setul 1

**1. (sisteme de ecuații)** Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ,  $c \neq 0$  și  $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ . Fie  $A$  mulțimea valorilor funcției  $f$  și  $\mathbb{I}$  mulțimea numerelor iraționale. Atunci

- a)  $A \cap \mathbb{I} = \emptyset$ ; b)  $A \cap \mathbb{I} = A$ ; c)  $A \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$ ; d)  $A \cap \mathbb{I} = \{0\}$ ; e)  $A \cap \mathbb{I} = (0, +\infty)$ ;  
 f)  $A \cap \mathbb{I} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = a + b\sqrt{2} \text{ } a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

**2. (polinoame)** Câte polinoame  $p(X)$  de grad 3 cu coeficienți întregi satisfac condițiile  $p(7) = 5$  și  $p(15) = 9$  ?  
 a) o infinitate; b) trei; c) unul; d) nici unul; e) patru; f) zece.

**3. (determinanți)** Calculați determinantul  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$  știind că  $x_1, x_2, x_3$  sunt soluțiile ecuației  $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$ .

- a) 2; b) -2; c) 4; d) -4; e) 1; f) -1.

**4. (limite de funcții)** Să se studieze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-3x(\cos x + 3 \sin x)}}{e^{-2x(\cos x + \sin x)}}$ .

- a) nu există; b) 0; c)  $\infty$ ; d)  $-\infty$ ; e) 1; f) -1.

**5. (continuitate)** Pentru ce valori ale lui  $a, b \in \mathbb{R}$  funcția  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{a}{x^2}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$  este continuă ?

- a)  $a = b = 1$ ; b)  $a = b$ ; c)  $a \in \mathbb{R}$  și  $b = 0$ ; d)  $f$  este discontinuă pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ ; e)  $a = 0$  și  $b \in \mathbb{R}$ ;  
 f)  $a = 0, b = 1$ .

**6. (derivabilitate)** Dacă notăm prin  $[a]$  partea întreagă a numărului real  $a$ , atunci funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{1}{x} \right], & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- a) este derivabilă; b) este continuă; c) este derivabilă în  $x = 1$ ; d) este continuă în  $x = 1$ ; e) este continuă în  $x = 0$ ;  
 f) este derivabilă în  $x = -1$ .

**7. (limite de șiruri)** Folosind sumele Riemann, să se calculeze limita

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right).$$

- a)  $\ell = \frac{3}{2}$ ; b)  $\ell = \frac{1}{\pi}$ ; c)  $\ell = \frac{2}{3}$ ; d)  $\ell = \frac{3}{2\pi}$ ; e)  $\ell = \frac{2}{\pi}$ ; f)  $\ell = 2$ .

**8. (geometrie analitică)** Fie  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 3)$  și fie  $C(a, b)$  pe dreapta  $y + x = 8$  astfel încât triunghiul  $ABC$  este isoscel cu baza  $AB$ . Fie  $H(x_0, y_0)$  ortocentrul triunghiului  $ABC$  și  $s = x_0 + y_0$ . Atunci

- a)  $s = \frac{24}{5}$ ; b)  $s = 6$ ; c)  $s = 4$ ; d)  $s = \frac{12}{5}$ ; e)  $s = \frac{16}{7}$ ; f)  $s = \frac{17}{3}$ .

**9. (ecuații trigonometrice)** Să se determine constantele  $m, n, p$  astfel încât

$$\sin^4 x + \cos^4 x + m(\sin^6 x + \cos^6 x) + n(\sin^8 x + \cos^8 x) + p(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- a) 1, 1, 1; b) 6, -10, 4; c)  $\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ ; d) 3, -5, 2; e) 1, -1, 1; f) 2, -3, 4.

**10. (ecuații algebrice)** Decideți care dintre numerele complexe următoare nu este soluție a ecuației

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0 ?$$

- a) 2; b)  $-1 + i\sqrt{3}$ ; c)  $-1 - i\sqrt{3}$ ; d)  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; e)  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; f)  $1 + i\sqrt{2}$ .